

滞后离散扰动奇异系统特征值区域的鲁棒性

王汝凉¹, 胡 刚², 刘永清¹

(1. 华南理工大学 自动控制工程系, 广东 广州 510640; 2 广东工业大学 研究生处, 广东 广州 510080)

摘要: 对带滞后的离散扰动奇异系统, 给出了所有广义特征值位于一个特殊区域内的充分性判据. 该区域的形状没有附加特别限制(比如圆). 当所有特征值按要求限制在稳定区域内时, 所给出的判据将成为稳定鲁棒性判据.

关键词: 鲁棒性; 奇异系统; 时滞

中图分类号: TP13

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2000)03-0040-04

自从广义系统的概念被 Rosenbrock^[1] 首次提出之后, 人们在实际应用中所遇到的许多模型均属于广义系统的范畴. 例如: 电力系统^[2], Leontief^[3] 动态投入产出模型以及受限机器人模型^[4] 等. 因此, 对广义系统的研究已引起人们极大的关注, 无论是所研究的问题还是研究方法都在不断发展和深入. 在工程实践中, 时滞的影响是经常遇到的. 最近几年, 对滞后离散扰动系统特征值位于一个特殊的圆内的鲁棒性研究, 已有很多文献论述^[5~8], 但关于滞后离散扰动奇异系统特征值区域的鲁棒性研究还不多见. 本文则讨论了带时滞的离散扰动奇异系统特征值区域的鲁棒性问题, 给出了所有广义特征值位于一个特殊区域内的充分性判据. 该区域的形状没有附加特别限制(比如圆). 这些判据还可以推广到带多时滞的扰动系统. 当所有特征值按要求限制在稳定区域内时, 所给出的判据将成为稳定鲁棒性判据. 另外, 当区域取为以 $(\alpha, 0)$ 为圆心, 以 r 为半径的特殊的圆 $D(\alpha, r)$ 时, 所给出的判据将成为扰动系统 $D(\alpha, r)$ - 稳定的鲁棒性判据.

1 符号和引理

设 I_n 表示 n 阶单位矩阵. $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径. $|A|$ 表示矩阵 A 的模. $W_1 \leq W_2$ 表示对所有的 i 和 j , 都有 $W_{j,1} \leq W_{j,2}$. $D(\alpha, r)$ 表示以 $(\alpha, 0)$ 为圆心, 以 r 为半径的圆, 这里 $0 < r < 1$ 并且 $|\alpha| + r < 1$.

考虑带时滞的离散扰动奇异系统:

$$Ex(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)x(k - \tau), \quad (1)$$

这里 $x(k+1), x(k), x(k - \tau) \in R^n$ 是状态向量; $E, A, B \in R^{n \times n}$ 是常数矩阵; E 是奇异矩阵且 $\text{rank } E = l < n$. $\tau \geq 1$ 是整数的滞后量; $\Delta A, \Delta B$ 是结构扰动矩阵且具有下面特点:

$$|\Delta A| \leq U, |\Delta B| \leq V, \quad (2)$$

其中 U, V 的所有元素都是正的常数矩阵.

在这篇文章中, 假定系统(1)是正则的. 除此之外, 还假定未被扰动的离散奇异系统(3)的所

收稿日期: 1999-12-24

基金项目: 国家自然科学基金重点基金资助课题(69934030).

作者简介: 王汝凉(1964), 副教授; 主要研究方向: 滞后广义系统的基本理论, 稳定性和鲁棒变结构控制.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

有广义特征值位于一个特殊的区域 D 内

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bx(k-\tau). \quad (3)$$

由于不可避免的不确定性, 系统(3)将被扰动成系统(1). 我们的问题是确定条件使得扰动系统(1)的所有广义特征值仍然保持在与系统(3)相同的特殊区域 D 内.

引理 1: 如果系统(3)的所有广义特征值位于一个特殊的区域 D 内, 那么

$$\det(zE - A - z^{-\tau}B) \neq 0, \quad z \in \Omega,$$

其中 Ω 表示区域 D 的边界.

证明: 如果系统(3)的所有广义特征值位于一个特殊的区域 D 内, 这意味着系统(3)的所有广义特征值将永远不能达到或者在区域 D 的边界上, 因此, 我们得到引理的结果.

引理 2: 扰动系统(1)的所有广义特征值位于特殊区域 D 内, 如果系统(3)的所有广义特征值限制在区域 D 内并且有

$$\det(zE - A(\varepsilon)) \neq 0, \text{ 对 } z \in \Omega, \varepsilon \in [0, 1], \quad (4)$$

这里 Ω 表示区域 D 的边界, $A(\varepsilon) = A + \varepsilon \Delta A$ 定义为 ε 的实连续函数矩阵, 对所有 $\varepsilon \in [0, 1]$, 而 $A(\varepsilon)$ 满足 $A(0) = A$ 并且

$$A(1) = A + \Delta A, \text{ 这里 } A = A + z^{-\tau}B, \Delta A = \Delta A + z^{-\tau}\Delta B. \quad (5)$$

证明: 由上面的定义, 当 ε 从 0 变到 1 时, $A(\varepsilon)$ 表示的系统矩阵将连续地从 A 变到 $A + \Delta A$. 由正则性, 我们有矩阵的广义特征值连续地依赖于矩阵元素的变化^[9]. 式(4)意味着 $A(\varepsilon)$ 的特征值轨迹将永远不能通过或到达边界 Ω . 因此, 当 ε 从 0 变到 1 时, $A(\varepsilon)$ 的所有广义特征值将仍然位于特殊区域 D 内. 因此, 完成引理的证明.

引理 3^[10]: 对于任意 n 阶方阵 R , 如果 $\rho(R) < 1$, 那么 $\det(I_n \pm \varepsilon R) \neq 0, \varepsilon \in [0, 1]$.

2 主要结果

现在我们分析扰动奇异系统(1)的特征值区域的鲁棒性.

定理 1: 假定奇异系统(3)的所有广义特征值位于一个特殊的区域 D 内. 则扰动奇异系统(1)的所有特征值仍然落在同一区域 D 内, 如果下面的不等式被满足:

$$\rho[(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(U + |z^{-\tau}|V)] < 1, \quad z \in \Omega, \quad (6)$$

其中 Ω 表示区域 D 的边界, U, V 如式(2)所示.

证明: 因为未被扰动的系统(3)的所有广义特征值位于一个特殊的区域 D 内, 由引理 1, 我们有

$$\det(zE - A - z^{-\tau}B) \neq 0 \quad z \in \Omega \quad (7)$$

利用式(2), 式(6)和谱半径的性质, 我们得到:

$$\begin{aligned} \rho[(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(\Delta A + z^{-\tau}\Delta B)] &\leq \rho[(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(|\Delta A| + |z^{-\tau}||\Delta B|)] \leq \\ \rho[(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(U + |z^{-\tau}|V)] &< 1, \quad z \in \Omega \end{aligned} \quad (8)$$

由引理 3, 不等式(8)意味着:

$$\det[I_n - \varepsilon(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(\Delta A + z^{-\tau}\Delta B)] \neq 0, \quad z \in \Omega. \quad (9)$$

因此,由式(7)和式(9),我们有:

$$\det(zE - A - z^{-\tau}B - \varepsilon(\Delta A + z^{-\tau}\Delta B)) = \det(zE - A - z^{-\tau}B) \cdot \det[I_n - \varepsilon(zE - A - z^{-\tau}B)^{-1}(\Delta A + z^{-\tau}\Delta B)] \neq 0$$

这里 $z \in \Omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$. 所以,由引理 2, 我们得到扰动奇异系统(1)的所有广义特征值位于区域 D 内. 证毕.

注释 1: 当 Ω 选择为单位圆, D 为单位圆盘时,充分判据(6) 将成为扰动奇异系统(1)的稳定鲁棒性判据.

注释 2: 如果一个系统的所有特征值都位于以 $(\alpha, 0)$ 为圆心, 以 r 为半径的特殊的圆 $D(\alpha, r)$ 内时, 就称该系统为 $D(\alpha, r)$ -稳定的, 这里 $0 < r < 1$ 并且 $|\alpha| + r < 1$.

下面的推论给出了扰动系统(1)的 $D(\alpha, r)$ -稳定的充分条件.

推论: 假定奇异系统(3)的所有广义特征值都位于圆盘 $D(\alpha, r)$ 内, 那么离散时滞扰动奇异系统(1)的所有特征值仍然位于圆盘 $D(\alpha, r)$ 内, 如果下面的条件被满足:

$$\rho[\frac{1}{r}(U + \delta V)](\omega E - ((A + (\alpha + r\omega)^{-\tau}B - \alpha E)/r))^{-1}] < 1, \quad (10)$$

其中 $\delta = (\min\{|\alpha + r|, |\alpha - r|\})^{-\tau}$, $\omega = \exp(j\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

3 例子

考虑式(1)所描述的滞后扰动离散奇异系统:

$$Ex(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)x(k-1) \quad (11)$$

这里 $\tau = 1$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.401 & 0.13 & 0.25 \\ -0.27 & -0.206 & 0.03 \\ 0.43 & -0.202 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.011 & 0.124 \\ -0.021 & 0.056 & 0.038 \\ 0.033 & -0.222 & -0.055 \end{bmatrix}.$$

系统: $Ex(k+1) = Ax(k) + Bx(k-1)$ 的特征值是 $0.3286 \pm 0.4247i$, $-0.2344 \pm 0.0574i$, 和 -0.0863 . 不失一般性, 我们取 $D(\alpha, r) = D(0, 0.6)$. 如果我们选择:

$$U = \begin{bmatrix} 0.204 & 0.442 & 0.408 \\ 0.102 & 0.255 & 0.187 \\ 0.306 & 0.612 & 0.289 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0026 & 0.0024 \\ 0.0006 & 0.0015 & 0.0011 \\ 0.0018 & 0.0036 & 0.0017 \end{bmatrix}.$$

通过直接计算条件(10), 注意到 $\alpha = 0$, $r = 0.6$, $\tau = 1$, $\delta = \frac{5}{3}$, 我们有:

$$\rho[\frac{1}{r}(U + \delta V)](\omega E - ((A + (\alpha + r\omega)^{-\tau}B - \alpha E)/r))^{-1}] = 0.8594 < 1,$$

因此, 该系统的所有广义特征值都位于圆盘 $D(0, 0.6)$ 内.

参考文献:

- [1] H H Rosenbrock. Structural Properties of Linear Dynamical Systems[J]. Int. J. Control. 1974, 20(2): 191-202.
- [2] D J Hill, I M Y Mareels. Stability Theory for Differential- Algebraic Systems with Application to Power Systems[J]. IEEE Trans. on Circuits & Systems. 1990, 37(11): 1416-1423.
- [3] S L Campbell. Singular Systems of Differential Equations[M]. Pitman: San Francisco, 1980. 27-28.
- [4] N H Madamoch, D Wang. Feedback Stabilization and Tracking of Constrained Robot[J]. IEEE Trans. on Automat Control. 1988, 33(5): 419-426.

- [5] C H Lee, T H S Li, F C Kung. D- stability analysis for discrete systems with a time delay[J]. Systems and Control Letters. 1992, 19(3) : 213-219.
- [6] T J Su, W J Shyr. Robust D- stability for linear uncertain discrete time- delay systems[J]. IEEE Trans. on Automatic Control. 1994, 39(4) : 425-428
- [7] H Trinh, M aldeen. D- stability analysis of discrete- delay perturbed systems[J]. International Journal of Control. 1995, 61(2) : 493-505.
- [8] K K Shyu, K Y Liaw. D- stability analysis for discrete delay systems[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers. 1995, 18(4) : 575-581.
- [9] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987. 235-236.
- [10] Y T Juang. Eigenvalue assignment robustness: the analysis for autonomous system matrices[J]. International Journal of Control. 1989, 49(8) : 1787-1797.

Robustness for Eigenvalue Region of Discrete Time- delay Perturbed Singular System

Wang Ru-liang¹, Hu Gang², Liu Yong-qing¹

(1. Dept. of Automatic Control Eng, South China Univ. of Tech, Guangzhou 510640 China;

2. Postgraduate Education Office, GDUT, Guangzhou, 510080 China)

Abstract: Sufficient criteria is proposed that all the generalized eigenvalues of discrete time- delay perturbed singular systems lie within certain specified regions. No restriction is imposed on the shapes of the specified regions. When all the eigenvalues are just required to locate in the stable region, the proposed criteria will become the stability robustness criteria.

Key words: robustness; singular system; time- delay